TEOREMA DE HAHN-BANACH

1. Sean X, Y espacios de Banach, M un subespacio denso de X y $T : M \to Y$ un operador lineal y continuo. Probar que existe un único operador $\tilde{T} : X \to Y$ que extiende T, esto es, $Tx = \tilde{T}x$ si $x \in M$ y conserva la norma, esto es, $\|T\|_{L(M;Y)} = \|\tilde{T}\|_{L(X;Y)}$.

2. Sean E, F espacios normados tales que $E \neq \{0\}$. Probar que F es completo si $L(E; F)$ es completo.

3. (a) Probar que el dual de c_0 puede ser identificado isométricamente con ℓ_1 y que el dual de ℓ_1 puede ser isométricamente identificado con ℓ_∞.
(b) Probar que el espacio c_0 no es reflexivo.

4. Sea X us espacio normado. Probar que si el espacio X^* es separable, entonces X es separable. ¿Es cierta la afirmación inversa?

5. (a) Sea X un espacio de Banach reflexivo. Probar que para cada $\Delta \in X^*$ se tiene

$$\|\Delta\| = \max\{|\Delta(x)| : x \in X \, , \, \|x\| \leq 1\}.$$

(b) Sea $\Lambda : c_0 \to R$ la función definida por

$$\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n}.$$

Probar que Λ es continua y calcular su norma. Demostrar que no existe ningún $x \in c_0$ de norma uno tal que $\Lambda(x) = \|\Lambda\|$.

6. Sea X es espacio de Banach $C([-1, 1])$ con la norma del supremo.
(a) Probar que la aplicación $\Delta : C([-1, 1]) \to R$ dada por

$$\Delta(f) = \int_{-1}^{0} f(t)dt - \int_{0}^{1} f(t)dt$$

es lineal y continua, y calcular su norma.
(b) Probar que no existe ninguna función f en X con $\|f\| = 1$ tal que $\|\Delta\| = |\Delta(f)|$.
(c) Concluir que X no es reflexivo.
(d) Por un método similar, probar que ℓ_1 no es reflexivo.

7. Consideremos el espacio vectorial ℓ_∞ formado por todas las sucesiones acotadas. Probar que a cada sucesión (ξ_k) se le puede asociar un número real que denotaremos LIM ξ_k (llamado límite de Banach) que cumple las siguientes condiciones:
(a) LIM es una función lineal.
(b) $\liminf \xi_k \leq$LIM $\xi_k \leq \limsup \xi_k$ para cada sucesión (ξ_k) (en particular LIM $\xi_k = \lim \xi_k$ si éste existe). (Indicación: Definir en el espacio c de todas las sucesiones convergentes el funcional lineal $\Lambda(x) = \lim \xi_k$ donde $x = (\xi_k)$ y en ℓ_∞ el funcional $p(x) = \limsup \xi_k$. Probar que Λ es continuo, que p es una subnorma y aplicar el Teorema de Hahn-Banach).

TEOREMA DE BAIRE. PRINCIPIO DE LA ACOTACIÓN UNIFORME. TEOREMAS DE LA APLICACIÓN ABIERTA Y DEL GRAFO CERRADO

1. Sea X un espacio de Banach con una base algebraica numerable.
(a) Probar que X es de dimensión finita.
(b) Probar que existen espacios normados de dimensión infinita numerable.

2. Sea X el espacio c_{00} con la norma de ℓ_2. Sea $\{\Delta_n\}$ una sucesión de formas lineales definidas por $\Delta_n(x) = n\xi_n$ si $x = (\xi_n)_n$. Probar lo siguiente
(a) Cada Δ_n es una forma lineal continua.
(b) Para cada $x \in X$ se tiene $\sup\{|\Delta_n(x)| : n \in N\} < \infty$.
(c) $\sup\{\|\Delta_n\| : n \in N\} = \infty$.
Concluir que la completitud es esencial en el Principio de la Acotación Uniforme y que c_{00} es un conjunto de primera categoría en ℓ_2.

3 (a) Sea X el espacio de funciones reales continuas, derivables y con derivada continua definidas en le intervalo [0,1], con la norma $\|f\| = \max\{|f(t)| : t \in [0,1]\}$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ consideremos la aplicación lineal $\Lambda_n : X \to \mathbf{R}$ definida por

$$\Lambda_n(f) = n(f(1/n) - f(0)).$$

(a) Probar que Λ_n es continua.
(b) Probar que para cada $f \in X$ se tiene que $\lim_n \Lambda_n(f) = f'(0)$.
(c) Utilizando la sucesión $f_n(t) = (1-t)^n$ comprobar que la aplicación $\Lambda : X \to \mathbf{R}$ definida por $\Lambda(f) = f'(0)$ no es continua.
(d) Probar que X es de primera categoría.

4. Sea X un espacio normado y A un subconjunto de X. Supongamos que para cada $\Delta \in X^*$ el conjunto $\{\Delta(x) : x \in A\}$ es acotado. Probar que A es acotado.

5.(a) Sea X el espacio ℓ_p con una norma $|||\cdot|||$ que lo hace completo y cumple la siguiente propiedad:

Sea x_n una sucesión en ℓ_p donde $x_n = (\xi_m^{(n)})_m$. Si $x_n \to 0$ en $(\ell_p, |||\cdot|||)$, entonces tiende a 0 componente a componente, esto es, $\lim_n(\xi_m^{(n)})_n = 0$ para todo m.

Probar que esta norma es equivalente a la norma usual de ℓ_p.

6. Sea $|||\cdot|||$ una norma en $C([0,1]$ que lo hace completo y tal que $\lim_{n\to\infty} |||f_n||| = 0$ implica que $\{f_n\}$ tiende a 0 puntualmente. Probar que esta norma es equivalente a la norma del supremo.